

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 004+519.8

А.В. Чигарев<sup>1</sup>, А.В. Борисов<sup>2</sup>

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АНТРОПОМОРФНОГО РОБОТА НА ПЛОСКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА МАТЕМАТИКА

Описывается разработанная методика автоматизированного составления дифференциальных уравнений движения двумерного антропоморфного робота. Приводятся результаты аналитических преобразований и численные расчеты в системе компьютерной математики, показаны его возможности анимации и экспорта результатов в общепринятый формат сохранения и просмотра видеoinформации «.gif».

В настоящее время приходится делать сложные численные расчеты и аналитические преобразования для описания механических систем с большим числом степеней свободы, сложными геометрическими связями, наличием деформируемости и т. д. Применение систем компьютерной математики позволило делать численные расчеты, которые ранее были практически недоступны ученым [1–3]. Громоздкие аналитические преобразования можно провести во много раз быстрее и эффективнее, представив результаты в удобном виде с помощью различных систем компьютерной математики (СКМ) [4–6], в частности системы Mathematica<sup>1</sup>. В данной статье рассмотрен один из вариантов таких аналитических преобразований на примере двухмерной ходьбы антропоморфного механизма. Это совершенно абстрактный пример, не имеющий аналога в реальности. Он используется для демонстрации возможностей пакета. Разработанный метод является универсальным, и его можно применять для описания других механических систем [7].

Для составления уравнений движения воспользуемся уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1)$$

где  $q_i$  – обобщенные координаты;  $Q_i$  – обобщенные неконсервативные силы,  $i = 1, \dots, n$ ;  $L = T - \Pi$ . Кинетическая энергия в обобщенных координатах имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2. \quad (2)$$

Так как связи, наложенные на систему, стационарны, время не входит явно в уравнение связей и, следовательно, не входит явно в выражения, определяющие  $\vec{r}_i$ . В этом случае кинетическая энергия будет однородной квадратичной формой от обобщенных скоростей.

Для  $i$ -го звена кинетическая энергия имеет вид

$$T_i = \frac{m_i v_{Ci}^2}{2} + \frac{I_i \dot{\phi}_i^2}{2}, \quad (3)$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -го звена;  $v_{Ci}$  – скорость центра масс  $i$ -го звена;  $I_i$  – момент инерции  $i$ -го звена относительно его центра масс;  $\dot{\phi}_i$  – угловая скорость  $i$ -го звена,  $i = 1, \dots, 11$ .

<sup>1</sup> Лицензионная версия данной программы (L3259-1206) приобретена за счет средств гранта президента Российской Федерации (МК-2524.2008.1).

Скорость центра масс  $v_{Ci}$   $i$ -го звена найдем следующим образом:

$$v_{Ci}^2 = v_{x_{Ci}}^2 + v_{y_{Ci}}^2. \quad (4)$$

Вертикальные и горизонтальные составляющие скорости  $i$ -го звена определяются выражениями

$$v_{x_{Ci}} = \frac{dx_{Ci}}{dt}; \quad v_{y_{Ci}} = \frac{dy_{Ci}}{dt}. \quad (5)$$

Тогда, подставляя выражения для скорости, получаем кинетическую энергию  $i$ -го звена. Запишем потенциальную энергию  $i$ -го звена ( $i = 1, \dots, 11$ ):

$$\Pi_i = m_i g y_{Ci} + E_i \left( (l_i - l_{i_0}) / l_{i_0} \right)^2 / 2. \quad (6)$$

Кинетическая энергия механизма складывается из кинетических энергий отдельных звеньев и корпуса:

$$T = \sum_{i=1}^{11} T_i. \quad (7)$$

Потенциальная энергия механизма складывается из потенциальных энергий отдельных звеньев и корпуса:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{11} \Pi_i. \quad (8)$$

Обобщенные силы  $Q_i$  находятся обычным образом из элементарной работы  $\delta A$  всех сил, приложенных к системе. Для потенциальных сил имеет место соотношение

$$Q_i = - \partial \Pi / \partial q_i, \quad (9)$$

где в число обобщенных координат входят углы, а в саму потенциальную энергию в общем случае – соответствующие моменты, умноженные на угловые координаты.

Подставляя  $T$ ,  $\Pi$ ,  $Q_i$  в уравнения Лагранжа, получаем уравнения движения механизма.

Для рассмотрения плоского движения антропоморфного робота в одноопорной фазе введем неподвижную правую декартову систему координат  $xuz$  с началом в точке  $O$  и плоскостью  $xu$ , в которой происходит движение центра масс. Система имеет две трехзвенные весомые ноги, две двухзвенные весомые руки и весомый корпус. Предполагаем, что правые и левые конечности являются одинаковыми. На рис. 1 схематично изображен механизм движения робота и введены соответствующие обозначения [8].

Пусть  $O_1A_1 = O_2A_2 = l_1$ ,  $A_1B_1 = A_2B_2 = l_2$ ,  $B_1C = B_2C = l_3$ ,  $CG = l_7$ ,  $DE_1 = DE_2 = l_8$ ,  $E_1F_1 = E_2F_2 = l_9$  – длины звеньев биомеханической системы, моделирующей человека. Положение в одноопорной фазе однозначно определяется углами  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, 11$ ), поэтому рассматриваемая система имеет одиннадцать степеней свободы. Обозначим через  $M_i$  моменты, развиваемые в  $i$ -м шарнире ( $i = 1, \dots, 11$ ).

Центры масс находятся в точках:  $C_1$  – стопы опорной ноги,  $C_2$  – голени опорной ноги,  $C_3$  – бедра опорной ноги,  $C_4$  – бедра переносной ноги,  $C_5$  – голени переносной ноги,  $C_6$  – стопы переносной ноги,  $C_7$  – корпуса,  $C_8$ ,  $C_{10}$  – плеч,  $C_9$ ,  $C_{11}$  – предплечий. Их положения будем задавать в виде отношений длины от начала соответствующего звена до центра масс ко всей длине звена через множители  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, 11$ ,  $0 < n_i < 1$ , если все звенья перенумеровать по номерам индексов у соответствующих углов.

Введем обозначения:  $m_1, m_2, m_3, m_8, m_9, m_7$  – массы стопы, голени, бедра, плеч, предплечий и корпуса соответственно;  $I_1, I_2, I_3, I_8, I_9, I_7$  – моменты инерции стопы, голени, бедра, плеч, предплечий и корпуса соответственно. Правую и левую конечности механизма будем считать одинаковыми.

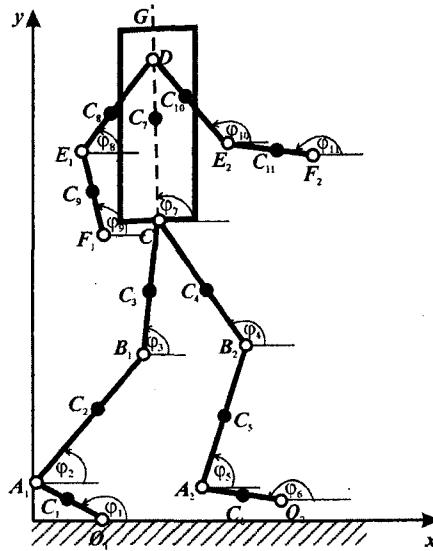


Рис. 1. Модель движения антропоморфного робота на плоскости в одноопорной фазе

Составление дифференциальных уравнений движения происходит следующим образом. Все преобразования будем выполнять в векторно-матричной форме. Справочную информацию об используемых командах программы Mathematica можно найти в работах [9, 10].

Вводим вектор обобщенных координат (команды, вводимые в программе Mathematica, будем выделять моноширинным шрифтом, однотипные команды – троеточием), чтобы исключить совпадения с начальными значениями, обозначаем индексы 10 и 11 через 8p и 9p:

$$q = \{\{\varphi_1[t]\}, \{\varphi_2[t]\}, \dots, \{\varphi_{9p}[t]\}\};$$

Формируем вектор угловых скоростей, дифференцируя вектор обобщенных координат:

$$qv = D[q, t];$$

Формируем таблицу производных по времени от обобщенных координат, необходимую для составления функции Лагранжа:

$$DS[T_, q_] := \text{Table}[D[T, q[[i, 1]]], \{i, 1, \text{Length}[q]\}];$$

Формируем таблицу производных по времени от производных обобщенных координат, необходимую для составления функции Лагранжа:

$$DV[X_, q_] := \text{Table}[D[X[[i, 1]], q[[j, 1]]], \{i, 1, \text{Length}[X]\}, \{j, 1, \text{Length}[q]\};$$

Вводим координаты центров масс звеньев механизма, пользуясь известными геометрическими соотношениями  $C_1, \dots, C_{9p}$ . Дифференцируя, вычисляем скорости центров масс  $vC_1, \dots, vC_{9p}$ . Определяем квадраты скоростей и сразу упрощаем их.

Находим кинетическую энергию механизма и сразу упрощаем ее:

$$T = 1/2*m_1*(\text{Transpose}[vC_1].vC_1) + \dots + 1/2*m_{9p}*(\text{Transpose}[vC_{9p}].vC_{9p});$$

$$T = \text{Simplify}[T][[1, 1]] + 1/2*I_1*D[\varphi_1[t], t]*D[\varphi_1[t], t] + \dots + 1/2*I_{9p}*D[\varphi_{9p}[t], t]*D[\varphi_{9p}[t], t];$$

Записываем потенциальную энергию:

$$П = m_1*g*C_1[[2, 1]] + \dots + m_{9p}*g*C_{9p}[[2, 1]];$$

Составляем функцию Лагранжа  $L$  как разность кинетической и потенциальной энергий.

Записываем уравнения движения в общем виде:

```
Eq=Simplify[Transpose[D[DS[L,qv],t]-DS[L,q]]];
```

Выписываем левые части уравнений (так как команды однотипны, дальнейшие преобразования будем выписывать только для первого уравнения):

```
E1=Eq[[1,1]];
```

Записываем уравнения с правыми частями:

```
Eqn1 = (E1 - (M1[t] - M2[t]));
```

Приравнивая их к нулю, получаем уравнения динамики движения антропоморфного механизма. Уравнения получаются слишком громоздкими. Чтобы привести их к компактному виду, сначала группируем по членам, содержащим первые и вторые производные обобщенных координат, затем упрощаем их.

Таким образом, описан метод составления дифференциальных уравнений движения двухмерной модели антропоморфного робота в СКМ Mathematica.

Полученная система обладает большим количеством неизвестных и при этом существенно нелинейна, поэтому решить ее аналитически невозможно. Проведем численное решение. Сформируем набор констант, характеризующих длины, массы, моменты инерции, ускорение свободного падения, коэффициенты, определяющие положения центров масс звеньев антропоморфного робота [11, 12], и поместим их в переменную `ss`. Подставим их в левые части дифференциальных уравнений движения с помощью команды `/.` `ss`. Управляющие моменты определяются в виде функций от времени на основании разработанной авторами методики [7]. Задаем время, за которое численно интегрируется система нелинейных дифференциальных уравнений движения `tk`, а также начальное положение и скорость каждого звена антропоморфного механизма.

Используем функцию для численного решения дифференциальных уравнений и их систем `NDSolve`. Решаем с ее помощью задачу Коши для полученной системы. Решение получаем в виде набора интерполяционных функций для каждой из неизвестных. Построим зависимости углов поворота звеньев антропоморфного робота от времени (рис. 2, а). Это аналитические функции, их можно дифференцировать. Однократное дифференцирование по времени дает зависимости угловой скорости звеньев от времени (рис. 2, б), а двукратное дифференцирование – зависимости углового ускорения звеньев механизма от времени (рис. 2, в).

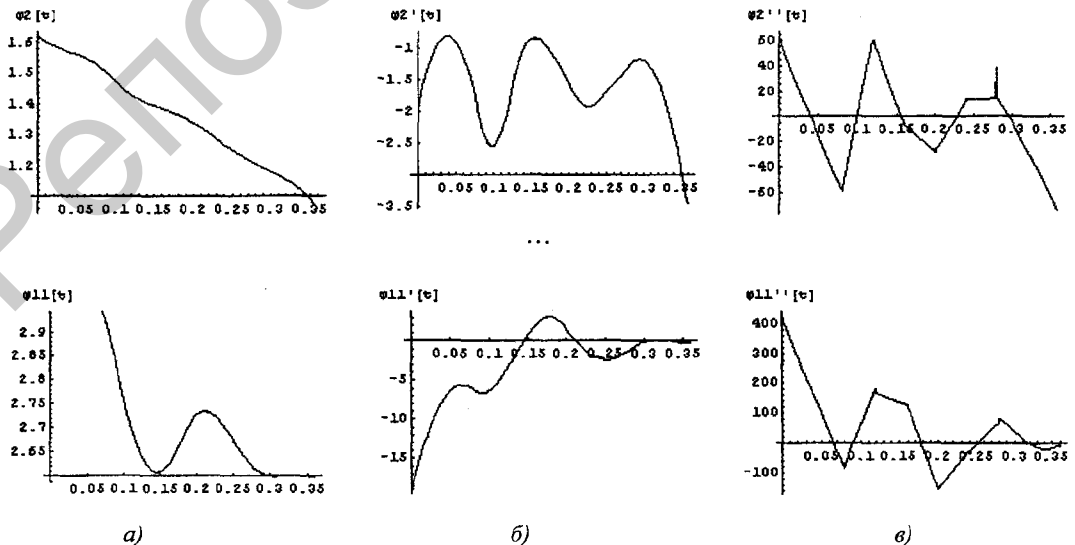


Рис. 2. Графики зависимостей для первого звена: а) угловой координаты; б) угловой скорости; в) углового ускорения

Создадим анимационную визуализацию двухмерного движения антропоморфного робота, пользуясь анимационными возможностями пакета Mathematica. В работе выводили 30 кадров анимации. Результатом явилась анимационная двухмерная ходьба антропоморфного робота на экране. На рис. 3 показаны два кадра анимации.

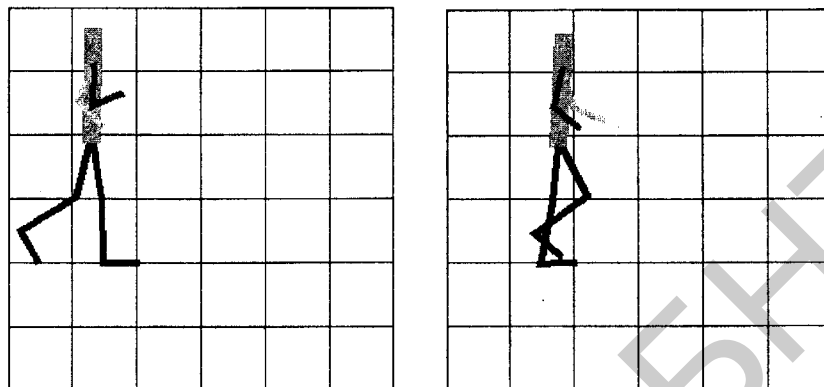


Рис. 3. Кадры анимационной визуализации ходьбы антропоморфного робота

Также возможен экспорт анимации в формат *.gif*. Отметим, что анимационно визуализировать таким способом можно не только решение дифференциальных уравнений для антропоморфного робота, но и любое движение, заданное интерполяционными функциями. Например, если экспериментально определить углы поворота звеньев человека при движении, то можно затем по этой экспериментальной информации построить интерполяционные функции. Разница будет состоять только в значениях соответствующих констант, которые необходимо будет определить для человека, и в том, что интерполяционные функции должны будут задаваться по-другому.

Таким образом, описаны методика численного решения системы дифференциальных уравнений движения двухмерной модели антропоморфного робота и анимационная визуализация его ходьбы.

### Заключение

Проводя анализ полученной модели, отметим, что опорно-двигательный аппарат человека имеет 240 степеней свободы, поэтому чем больше стержней-звеньев и шарниров-суставов содержит модель, тем точнее она описывает скелет-структуру биомеханической системы. В данной работе получены уравнения для 11-звенной стержневой системы (ранее известны 7-8-звенные). Впервые учтена деформируемость звеньев, а также получен метод, позволяющий автоматизировать процесс получения все более структурно и механически сложных моделей. Полученные нелинейные системы уравнений позволяют в принципе исследовать спектр походок от периодических до хаотических. Физико-механические параметры, содержащиеся в уравнениях, позволяют варьировать походки: здоровые, больные, протезированные, женские, мужские, профессиональные и т. д. В данном случае выбор пакета Mathematica обусловлен требованием получения достоверной аналитической модели и анимации ее на основе полученных уравнений. Если бы целью авторов было конструирование и создание механического макета, то использовались бы другие пакеты, например Adams, ANSYS. Для целей автоматизации получения достоверных математических моделей использование пакета Mathematica представляется наиболее целесообразным.

Описанная методика является универсальной и может применяться для решения систем дифференциальных уравнений динамики разнообразных объектов с большим или меньшим количеством степеней свободы. Анимационная визуализация также может применяться для визуализации движений динамических систем.

**Список литературы**

1. Белецкий, В.В. Двухногая ходьба : модельные задачи динамики и управления / В.В. Белецкий. – М. : Наука, 1984. – 288 с.
2. Бербюк, В.Е. Динамика и оптимизация робототехнических систем / В.Е. Бербюк. – Киев : Наукова думка, 1989. – 192 с.
3. Формальский, А.М. Перемещение антропоморфных механизмов / А.М. Формальский. – М. : Наука, 1982. – 368 с.
4. Ларин, В.Б. Управление статически неустойчивыми шагающими аппаратами / В.Б. Ларин // Прикладная математика. – 2000. – Т. 36, № 6. – С. 37–66.
5. Математическое моделирование в задачах биомеханики тазобедренного сустава / Р.Х. Закиров [и др.] // Материалы XV Междунар. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – М. : Изд-во МАИ, 2009. – Т. 2. – С. 148–149.
6. Дружинин, Г.В. Учет свойств человека в моделях технологий / Г.В. Дружинин. – М. : МАИК Наука, 2000. – 327 с.
7. Борисов, А.В. Моделирование опорно-двигательного аппарата человека и применение полученных результатов для разработки модели антропоморфного робота / А.В. Борисов. – М. : Спутник+, 2009. – 212 с.
8. Чигарев, А.В. Биомеханика / А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, А.В. Борисов. – Минск : Изд-во Гревцова, 2010. – 284 с.
9. Дьяконов, В.П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления / В.П. Дьяконов. – М. : ДМК-Пресс, 2008. – 576 с.
10. Чигарев, А.В. Основы системы Mathematica 6.0. Задачи и решения / А.В. Чигарев, А.И. Кравчук, А.С. Кравчук. – Минск : Технопринт, 2008. – 136 с.
11. Няшин, Ю.И. Основы биомеханики / Ю.И. Няшин, В.А. Лохов. – Изд-во ПГТУ, 2007. – 210 с.
12. Воронов, А.В. Анатомическое строение и биомеханические характеристики мышц и суставов нижней конечности / А.В. Воронов. – М. : Физкультура, образование и наука, 2003. – 203 с.

Поступила 12.09.2012

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет,  
Минск, пр. Независимости, 65  
e-mail: chigarev@rambler.ru

<sup>2</sup>Филиал ФГБОУ ВПО «НИУ „Московский энергетический институт”»,  
Смоленск, Энергетический пр., д. 1  
e-mail: borisowandrej@yandex.ru

**A.V. Chigarev, A.V. Borisov**

**SIMULATION OF AN ANTHROPOMORPHOUS ROBOT MOTION ON THE PLANE WITH THE USE OF MATHEMATICA PACKAGE**

A technique of automated compiling differential equations of two-dimensional anthropomorphic robot motion is described. The results of numerical calculations in the system «Mathematica», robot's animation capabilities and export of the results into «.gif» format are reviewed.